

Теорема Банаха об обратном операторе (из доказательства). Замкнутые операторы, теорема о замкнутом графике

↓ (Банаха об обратном оп-ре)

Опр. оп-р, $A: X \rightarrow Y$; $D(A) = X$, $R(A) = Y$, где X, Y — банаховы. Тогда $\exists A^{-1}$ — лнн. опр. оп-р

▲ Без док-ва

Лем. X — лнн. норм., заданы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2: X$ полно относил. обеих норм. $\exists M > 0: \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$, $\forall x \in X \Rightarrow \exists m > 0: \|x\|_1 \leq m \|x\|_2$ (т.е. нормы эквивалентны)

▲ $E: X_1 \rightarrow X_2$, $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$. По усл. $\|Ex\|_2 \leq M \|x\|_1$, т.е. E — опр. $\Rightarrow \exists E^{-1}$ — опр. $: x_2 \rightarrow x_1 = x$
 $\Rightarrow \exists m > 0: \|x\|_1 \leq m \|x\|_2$ ↑ Теорема Банаха

Лнн. оп-р $A: X \rightarrow Y$ наз-ся **замкнутым**, if $\forall x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$, $Ax_n \rightarrow y \Rightarrow x \in D(A)$, $Ax = y$

График оп-ра A наз-ся пр-во $\Gamma(A) = (x, Ax)$, $x \in D(A)$

Утв A замкнут $\Leftrightarrow \Gamma(A)$ замкнут в $\|\cdot\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|Ax\|^2}$

↓ (о замкнутом графике) X, Y — полн. лнн. пр-ва, $A: X \rightarrow Y$, $D(A) = X$, A — замкн. оп-р $\Rightarrow A$ опр.

$X_1 = (X, \|x\| + \|Ax\|)$, $X_2 = (X, \|x\|)$, $\|x\|_{X_1} = \|x\| + \|Ax\| \leq \|x\| + \|A\| \|x\| = (1 + \|A\|) \|x\|$
 $= \|x\| + \|Ax\|$. X_2 — полн. по условию, поэтому X_1 — полн. по лемме.

следует из замкн. A . $\|x_n - x_m\|_{X_1} = \|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\|$
 $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0, \|Ax_n - Ax_m\| \rightarrow 0 \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow y$
 $\exists x \in D(A) = X, Ax = y \Rightarrow \|x_n - x\|_{X_1} \rightarrow 0$

По след. из т. Банаха $\|x\| \leq m \|x\|_{X_1} = m (\|x\| + \|Ax\|) \Rightarrow A$ опр. ■